EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60
V - 1 FEBRUARI 1960

INHOUD

Dr. W. Bevelander: De voortbeweging van een projectiel in de atmosfeer 145
Dr. J. W. Dekker: De Differentiaalrekening en het Binomium van Newton 155
Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 158
Mechanica-Opgaven N I 1959 160
Dr. C. J. Vooys: Denkbeeldig Getal bij Cardano . . . 162
Boekbespreking 166
De Onderwijsbevoegdheid van Ingenieurs en Officieren . 170
J. C. G. Nottrot: De Konijntjesreeks van Fibonacci en de Gulden Snede 174
Recreatie 175
Kalender 176

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt ƒ 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en ƒ 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE VOORTBEWEGING VAN EEN PROJECTIEL IN DE ATMOSFEER

door

Dr. W. Bevelander
leraar aan de Koninklijke Militaire Academie
te Breda

1. *Inleiding* [1]).

Het Griekse woord „ballistika" betekent „werplijn". Tegenwoordig verstaat men onder de ballistiek, de wetenschap, die de gedragingen van het projectiel bestudeert. Zij is onderverdeeld in drie delen:

a. De inwendige ballistiek.

Dit is de studie van de gedragingen van het projectiel in de vuurmond, van de scheikundige verschijnselen, die hier optreden en van de natuurkundige verschijnselen, die de beweging van het projectiel tot resultaat hebben.

b. De uitwendige ballistiek.

Hieronder verstaat men de studie van het gedrag van het projectiel, nadat dit de monding van het kanon heeft verlaten. Zij vindt praktische toepassing bij het berekenen van de projectielbaan.

c. De uitwerkingsballistiek.

Deze omvat de studie van de gedragingen van het projectiel, vanaf het moment, dat het projectiel het doel treft, dus bijv. het doorboren van pantser of beton, het onderzoek van de scherfbeweging.

De bovengenoemde definities hebben betrekking op de z.g. conventionele vuurmonden, waarbij de versnelling van het projectiel plaatsvindt in de loop van het kanon.

---

[1]) [1] pg. 3. De cijfers tussen vierkante haken hebben betrekking op de literatuur-opgave aan het eind van het artikel.

In en na de tweede wereldoorlog is een gehele nieuwe tak van wetenschap ontwikkeld, de z.g. raketten-ballistiek. Zolang de raket brandt, zullen de verbrandingsgassen aan de achterzijde uitstromen en deze aan de raket een versnelling geven. Dit gaat door totdat de brandstof in zijn geheel is opgebrand. Vanaf dit tijdstip zal de raket zich als een conventioneel projectiel gedragen. De baan van een raket bestaat dus uit twee delen. De studie van deze baan valt onder de uitwendige ballistiek. Onder de inwendige ballistiek van de raket verstaat men de bestudering van de verschijnselen in de verbrandingskamer en de straalpijp.

We zullen ons in deze artikelen beperken tot de uitwendige ballistiek van een conventioneel projectiel, verschoten uit een conventionele vuurmond.

2. *De uitwendige invloeden, die werken op een projectiel, dat zich in de atmosfeer voortbeweegt* [2]).

Deze invloeden zijn:

a. Een versnelling tengevolge van de zwaartekracht. Gewoonlijk neemt men deze constant naar richting en grootte. Dit impliceert dus, dat we het aardoppervlak als een plat vlak beschouwen.

b. De luchtweerstand. Het grote probleem van de uitwendige ballistiek is het brengen van de luchtweerstand in een juiste mathematische vorm.

c. De heersende wind. In eerste instantie worden de berekeningen uitgevoerd voor een windstille atmosfeer, dus de lucht in rust. Achteraf berekent men de invloed van de wind als een speciale correctie.

d. De rotatie van de aarde om zijn as. Deze invloed krijgt pas enige betekenis, als we over zeer grote afstanden gaan schieten.

e. Gedurende de tijd, dat het projectiel zich in de loop voortbeweegt, krijgt dit een rotatie naar rechts. In de atmosfeer treedt, tengevolge van deze rotatie, het z.g. *Magnus-effect* op, dat voor het projectiel een zijdelingse afwijking naar links oplevert.

f. Eveneens tengevolge van de rotatie gaat het *gyroscopisch effect* optreden. Het projectiel krijgt een precessiebeweging, waardoor de as nagenoeg blijft samenvallen met de raaklijn aan de baan, terwijl de spits voortdurend naar voren gericht is. Het projectiel wordt, bij een juiste rotatiesnelheid, in zijn baan gestabiliseerd.

---

[2]) [1] pg. 17 e.v.

Het gyroscopisch effect veroorzaakt bij het projectiel een zijdelingse afwijking naar rechts. Deze laatste overweegt bij kleine uitvaartshoeken. Schiet men echter onder een grote hoek, dan overweegt de afwijking naar links door het Magnus-effect.

3. *De differentiaal vergelijkingen van de projectielbaan.*

Voor de opstelling van de differentiaal-vergelijkingen van de baan, worden doorgaans een aantal vereenvoudigende veronderstellingen gedaan: [3])

1. Het zwaartepunt beschrijft een baan in een verticaal vlak, aangebracht door de as van de loop van het kanon, het z.g. *schootsvlak.*
2. De lengte-as van het projectiel valt voortdurend samen met de raaklijn aan de baan.
3. De snelheidsvector grijpt aan in het zwaartepunt en is gericht langs de raaklijn.
4. De vector van de luchtweerstand grijpt eveneens aan in het zwaartepunt en is langs de raaklijn gericht, tegengesteld aan de snelheidsvector.
5. Het zwaartepunt is eveneens gedacht als aangrijpingspunt van de vector, die de versnelling van de zwaartekracht voorstelt. Deze vector valt samen met de normaal op het, als een plat vlak verondersteld, aardoppervlak. Gedurende de beweging wordt deze versnelling constant verondersteld.

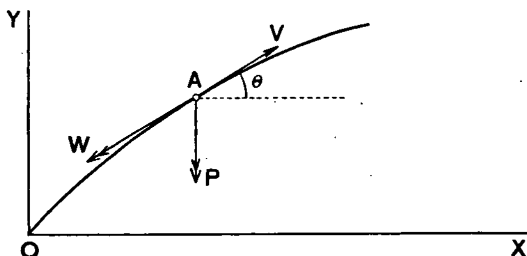


Fig. 1. Een deel van de projectielbaan, waarbij het zwaartepunt van het projectiel zich in A bevindt, terwijl de vectoren voor de snelheid (V), de luchtweerstand (W) en het projectielgewicht (P) zijn aangebracht.

---

[3]) [1] pg. 27.

We kunnen de differentiaalvergelijkingen langs x- en y-as nu als volgt opstellen: [4])

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dV_x}{dt} = -W\cos\theta \tag{1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dV_y}{dt} = -W\sin\theta - P \tag{2}$$

m = de massa van het projectiel.
V_x = de horizontale snelheidscomponent.
V_y = de verticale snelheidscomponent.
W = de luchtweerstand.
P = mg = het projectielgewicht, g = de versnelling van de zwaartekracht.
θ = de hoek, die de raaklijn aan de baan maakt met de horizontaal.

Op te merken valt, dat de oorsprong O van het coördinatenstelsel geplaatst is in het eindpunt van de loop (z.g. *monding*) van het kanon. De horizontale x-as is dus iets boven het aardoppervlak gedacht.

Met behulp van de differentiaalvergelijkingen kunnen we reeds direct zekere verschillen voorspellen tussen een baan in het luchtledig en één in de atmosfeer. Voor beide banen veronderstellen we dezelfde beginsnelheid V_0, alsmede een gelijke *uitvaartshoek* φ. Onder deze laatste verstaat men de hoek, die de raaklijn aan de baan maakt met de horizontaal, in de oorsprong van het coördinatenstelsel. We zien dan, dat de luchtweerstand een vertraging geeft in horizontale richting, zodat de totale afstand, door het projectiel in deze richting afgelegd (de z.g. *dracht* X), belangrijk kleiner is dan in het luchtledig. In verticale richting geeft de luchtweerstand eveneens een vertraging, zodat de maximaal bereikte hoogte (het z.g. *culminatiepunt*) bij een atmosferische baan belangrijk lager ligt, dan bij één in het vacuum.

Denken we ons nu een z.g. meelopend assenstelsel in, waarvan de oorsprong in het zwaartepunt is geplaatst en de assen resp. langs raaklijn en normaal vallen, dan kunnen we langs de raaklijn de volgende differentiaalvergelijking opstellen (fig. 1) [5]):

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dV}{dt} = -W - P\sin\theta \tag{3}$$

---

[4]) [1] pg. 53 e.v.
[5]) [1] pg. 54

Uit deze vergelijking kunnen we concluderen, dat in de stijgende tak, zowel de luchtkracht, als de component van het gewicht, vertragend werken, met als resultaat een sterke afname van de snelheid. In de dalende tak zal de gewichtscomponent versnellend gaan werken (sin θ negatief), terwijl de luchtkracht nog steeds vertraagt. Hierdoor zal de snelheidsvariatie in dit deel van de baan veel geringer zijn.

Tabel 1 geeft voor diverse aanvangssnelheden en uitvaartshoeken een aantal berekende waarden in het vacuum en in de atmosfeer, waaruit de boven besproken punten gemakkelijk zijn te verifiëren. Eén opmerking dient nog gemaakt te worden. Uit de cijfers blijkt, dat bij een kleine beginsnelheid de opgesomde verschillen betrekkelijk gering zijn. In dit licht gezien is de, enkele eeuwen geleden, geldende theorie, dat de luchtweerstand bij de berekening van banen te verwaarlozen is, wel te begrijpen. We zien echter, dat bij de huidige grote snelheden, de luchtweerstand een integrerend deel van de berekeningen gaat uitmaken.

TABEL 1

Enkele waarden voor het vacuum en de atmosfeer

Aanvangs-snelheid V_0 in m/sec	Uitvaarts-hoek φ	Culmina-tiesnelheid V_c in m/sec	Eind-snelheid V_e in m/sec	Culminatiehoogte y_c in kilometers		Totale dracht X in kilometers	
				atmosfeer	vacuum	atmosfeer	vacuum
198	24°12′	169	169	0,32	0,34	2,74	2,99
207	65°18′	79	191	1,68	1,80	2,93	3,32
640	10°45′	412	327	0,54	0,73	8,69	15,32
640	60°56′	162	415	8,09	15,97	14,63	35,50
800	24°25′	367	349	3,20	5,58	19,63	49,16
853	43° 1′	264	420	7,62	17,28	23,32	74,07

4. *Een wiskundige formule voor de luchtweerstand* [6]).

Uitgaande van de bekende formule van Newton, waarbij de kracht gelijk is aan het produkt van massa en versnelling, kunnen we voor de luchtweerstand opschrijven:

$$W = \frac{P}{g} \cdot c \cdot f(V) \qquad (4)$$

Hierin is P het projectielgewicht, g de versnelling der zwaartekracht

[6]) [1] pg. 23 e.v.

en $cf(V)$ de vertraging. In een poging om, wiskundig gezien, een scheiding der variabelen te bewerkstelligen, is de afhankelijkheid van de snelheid in een functie $f(V)$, de z.g. *luchtweerstandswet*, ondergebracht, terwijl alle andere invloeden in de c (*ballistische coëfficiënt*), in feite een evenredigheidsfactor, zijn gedacht.

We kunnen de luchtweerstand echter ook van een meer technische zijde benaderen, door in een formule een opsomming te geven van enkele grootheden, die beslist van invloed zijn op de luchtkracht. Verschillende ballistici stellen genoemde formule enigszins anders op, echter zonder principiële verschillen. We zullen de volgende vorm vermelden:

$$W = k\, i\, \pi\, R^2 \frac{\delta}{\delta_0} f(V) \tag{5}$$

Hierin stelt k een getallenfactor voor en i de *vormwaarde*, waarin de uiterlijke, zo men wil, aërodynamische vorm wordt verdisconteerd. Men houdt bij de vormwaarde in hoofdzaak rekening met de vorm van de neus (*ogief*) van het projectiel. Hoe spitser deze is, hoe gunstiger. Bovendien geeft een afschuining aan de achterzijde een vermindering van i. Het oppervlak van de doorsnede op de plaats waar het projectiel het dikste is, wordt verantwoord door πR^2 (2R is de middellijn of het *kaliber*). Verder is δ het gewicht van de lucht, ter plaatse waar het projectiel zich bevindt, terwijl δ_0 ditzelfde gewicht voorstelt op zeeniveau. Uit beide formules lost men de ballistische coëfficiënt op:

$$c = ki \frac{\pi R^2}{P} g \frac{\delta}{\delta_0} \tag{6}$$

Voor een gunstige luchtweerstand moet i klein en $\frac{P}{\pi R^2}$, het gewicht per oppervlakte-eenheid (*metaalbelasting*), groot zijn. Dus een slank projectiel met een spits toelopend ogief.

Heeft men een analytische vorm voor de luchtweerstandswet $f(V)$ gevonden, dan wordt formule (6) ter berekening van c nog slechts gebruikt voor a priori berekeningen van een baan voor een nieuw projectiel. Dergelijke berekeningen zijn noodzakelijk ten einde een juiste opstelling van de meet-apparatuur te bewerkstelligen. Experimenteel bepaalt men dan de juiste waarde van de ballistische coëfficiënt.

5. *Een en ander over de geschiedenis van de luchtweerstand* [7]).

Omstreeks 1500 waren de geleerden de mening toegedaan, dat als een lichaam een stoot kreeg, dit zich in rechtlijnige richting ging voortbewegen, tot aan het punt, waar de hoeveelheid van beweging was uitgeput. Daarna kreeg het lichaam een kromlijnige baan, waarbij het de grond weer bereikte.

Eerst de Italiaan Tartaglia, die tussen 1537 en 1546 een werk in twee delen schreef over de ballistica, toonde langs mathematische weg aan, dat de gehele vluchtbaan kromlijnig moest zijn. Galileï bracht de werking van de zwaartekracht geheel juist in rekening, door in 1590 te concluderen, dat de baan de vorm van een parabool had.

In de 17e eeuw kwam van de zijde van de artillerie de vraag naar voren om tabellen te construeren voor het werpen van bommen. Het probleem was dus om bij een gegeven afstand en aanvangssnelheid een uitvaartshoek te bepalen. De vraag kwam naar voren, of bij deze tabellen rekening moest worden gehouden met de invloed van de luchtweerstand. Aanvankelijk gold algemeen de opvatting, dat deze verwaarloosd kon worden. Reeds eerder merkten we op dat, in verband met de geringe aanvangssnelheden, dit discutabel was. Zo kwamen dan in 1734 de eerste schootstafels tot stand, berustend op de parabolische theorie, dus met verwaarlozing van de luchtweerstand. Ze zijn te vinden in een werk van Bilidor, getiteld: „Bombardier français ou nouvelle méthode de jetter les bombes avec précision”. Merkwaardig is te vermelden, dat deze publikatie in Amsterdam werd uitgegeven.

Niettemin stelde men voortdurend pogingen in het werk om de differentiaalvergelijkingen te integreren met een bepaalde substitutie voor $f(V)$. We zullen zien, dat aanvankelijk ook wiskundigen van naam zich met deze problemen bezighielden. De wetenschap was in die jaren nog weinig gedifferentieerd, zodat de beoefening er van zich kon uitstrekken tot diverse takken. Ook was de studie van de ballistiek in het begin zuiver theoretisch. Pas met de intrede van het proefondervindelijk onderzoek, komt de ontwikkeling van de methoden ter berekening van banen, meer in de sfeer van de militairen. Dit is zo gebleven tot op de huidige dag. Slechts enkele wetenschappelijk opgeleide burgers, die door een of andere oorzaak zich in deze richting specialiseerden, werden betrokken bij de ontwikkeling van de ballistische wetenschap.

---

[7]) [1] pg. 27—29; [2]; [3] pg. 54 e.v.

Newton beschouwde reeds in 1687 de beweging van een stoffelijk punt, waarbij hij de luchtweerstand evenredig aan V nam. Ditzelfde deed de Engelsman Wallis. Later ging Newton uit van een weerstand, evenredig aan V^2, waarbij hij de volgende formule opstelde:

$$W = \frac{F\delta V^2}{g} \tag{7}$$

Hierin was F het oppervlak van de doorsnede van het projectiel, δ het luchtgewicht ter plaatse en g de versnelling der zwaartekracht.

Ook Leibniz, Christiaan Huygens en Keill trachtten een oplossing te vinden door de weerstand evenredig aan V^2 te stellen. Jean en Nicolas Bernoulli vonden in 1719 een gesloten oplossing waarbij zij stelden: $f(V) = V^n$.

Legendre en Jacobi losten in 1782 het ballistische probleem op, waarbij zij voor de luchtweerstand invoerden:

$$W = a + bV^n.$$

Zij merkten op, dat de constanten a en b door proefnemingen moesten worden bepaald. Bij hen komt dus de gedachte naar voren om theorie en experiment te combineren.

De eerste reeks proefnemingen op grote schaal werden tussen 1775 en 1791 ondernomen door Hutton in *Woolwich* (Engeland). Hij schreef de luchtweerstand in de vorm:

$$W = k \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{V^2}{2g} \cdot \delta \tag{8}$$,

waarin het symbool d geschreven is voor de middellijn van het projectiel. De constante k bepaalde hij experimenteel, als functie van de snelheid. Gebaseerd op de waarnemingen van Hutton publiceerde Piobert in 1837 een formule, waarin termen met V^2 en V^3 voorkwamen.

De 19e eeuw geeft in Europa uitgebreide schietproeven te zien. Uit waarnemingen van proeven in *Metz* (1839/40) stelt Didion een formule op:

$$W = 0{,}027\pi R^2 \frac{\delta}{\delta_0} i \; V^2 \left(1 + \frac{V}{435}\right) \tag{9}$$,

waarin δ_0 het luchtgewicht op zeeniveau voorstelt. De betekenis van de vormwaarde i werd reeds eerder uiteengezet. Voor ronde kogels was hier $i = 1$ te stellen.

Een tweede reeks experimenten werd in *Metz* ondernomen in de jaren 1856 tot 1859. Als resultaat komt de Italiaan San Roberto met de experimentele formule:

$$W = 0{,}0387 \cdot \pi R^2 \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot V^2 \left(1 + \frac{V^2}{696^2}\right) \qquad (10)$$

Voor bolvormige projectielen nam men weer $i = 1$. Resultaten van experimenten in *Woolwich* (1866—1870) brachten Bashforth tot de vorm:

$$W = k \cdot \pi R^2 \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot V^3 \qquad (11)$$

De getallenfactor k varieert met de snelheid. Op te merken valt, dat de bolvormige projectielen langzamerhand vervangen werden door de meer moderne modellen met een ogivale spits, waarbij men de vorm definieert door de kromtestraal. De keuze der constanten werd bij Bashforth nu aangepast aan de destijds ontworpen nieuwe projectielvormen. Voor de toen gebruikelijke kromtestraal van 1,5 kaliber moest $i = 1$ gesubstitueerd worden.

In de jaren 1868/69 verzamelde Mayevski, bijgestaan door Sabudski in *St. Petersburg* resultaten van schietexperimenten. Krupp deed hetzelfde tussen 1875 en 1881. Mayevski, die behalve over zijn eigen gegevens, ook de beschikking had over die van Krupp en Bashforth, bracht de luchtweerstandswet in een nieuwe vorm, n.l. als een z.g. *zonewet.* Hij stelde $f(V) = V^n$, waarbij n, genoemd de *weerstandsgraad,* voor diverse snelheidsgebieden een andere waarde kreeg. Zijn formule voor de weerstand van de lucht luidde:

$$W = k \cdot \pi R^2 \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot V^n \qquad (12)$$

Hierin was $i = 1$ voor projectielen, waarvan het ogief een kromtestraal had van twee kaliber. Voor k en n vond hij voor de vermelde snelheden de volgende waarden:

$k = 0{,}0140$	$n = 2$	$V \leqq 240$ m/sec
$0{,}0^4 5834$ [8]	3	$240 < V \leqq 295$
$0{,}0^9 6709$	5	$295 < V \leqq 375$
$0{,}0^4 9404$	3	$375 < V \leqq 419$
$0{,}0394$	2	$419 < V \leqq 550$
$0{,}2616$	1,7	$550 < V \leqq 800$
$0{,}7130$	1,55	$800 < V \leqq 1000$

Onder invloed van de Europese activiteiten werd in Nederland in 1866 de *Commissie van Proefneming* opgericht, die de beoefening van de ballistiek als taak kreeg toegewezen. Hojel zette, als voorzitter van deze commissie, in 1884 een reeks experimenten in gang.

[8]) 0^4 wil zeggen, dat achter de komma 4 nullen geplaatst moeten worden.

Met de verkregen resultaten construeerde hij de zonewet van Hojel:

$$W = 1000k \frac{(2R)^2}{g} \cdot \frac{\delta}{\delta_0} \cdot i \cdot V^n \qquad (13)$$

Voor een ogivale spits met 2 kaliber kromtestraal was $i = 1$. De grootheden k en n variëerden met de snelheid volgens onderstaand schema:

$k = 0{,}0^6 84535$	$n = 2{,}5$	$140 < V \leqq 300$ m/sec
$0{,}0^{11} 5423$	5	$300 < V \leqq 350$
$0{,}0^8 51381$	3,83	$350 < V \leqq 400$
$0{,}0^4 7483$	1,77	$400 < V \leqq 500$
$0{,}0^3 5467$	1,91	$500 < V \leqq 700$

Deze wijze van opstelling der luchtweerstand vond algemeen navolging. De Italiaanse ballisticus van naam Siacci, publiceerde aan het eind van de vorige eeuw een drietal methoden ter berekening van projectielbanen. Bij zijn eerste methode (1880) gebruikte hij voor de weerstand van de lucht, de zonewet van Mayevski. In 1888 kwam hij met een geheel herziene methode, waarbij hij een eigen zonewet invoerde. Tenslotte publiceerde hij in 1896 een derde methode, waarbij voor de luchtweerstandswet $f(V)$, de eenheidswet van Siacci werd gelanceerd.

Het idee van een eenheidswet, waarbij een formule voor $f(V)$ werd opgesteld, die voor het gehele snelheidsgebied gold, werd door Siacci voor het eerst naar voren gebracht. In de 20e eeuw bouwde men hierop voort en deze wijze van voorstellen van de luchtweerstand is, op het vasteland van Europa, tot heden toe, gebruikelijk gebleven.

In Engeland ging men een andere weg. Op den duur werd daar voor $f(V)$ steeds V^2 ingevoerd. Tengevolge hiervan werd de ballistische coëfficiënt, zoals wij later zullen toelichten, snelheidsafhankelijk. De Engelse methoden berusten dus nog steeds op de door Hutton omstreeks 1780 opgestelde formule (8). De Amerikanen gingen zich pas in de eerste wereldoorlog met ballistiek bezighouden. Ze oriënteerden zich aanvankelijk op de Fransen, doch gingen later over op de Engelse wijze van voorstellen van de luchtweerstand. Ook in de aërodynamica werd deze laatste wijze van voorstellen van een luchtkracht gebruikelijk. (*wordt vervolgd*)

LITERATUUROPGAVE

[1] W. Bevelander — Uitwendige ballistiek, diss. Leiden 1954.
[2] Th. J. van Buuren — Bijdrage tot de leer der ballistica, diss. Leiden 1879.
[3] C. Cranz — Lehrbuch der Ballistiek (1925), deel I.

DE DIFFERENTIAALREKENING EN HET BINOMIUM VAN NEWTON

door

Dr. J. W. Dekker.

Groningen

1. Bij de behandeling van het differentiëren van een logaritme stuiten we op de uitdrukking

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Om de waarde van deze limiet te berekenen hebben we het binomium van Newton nodig.

2. De natuurlijkste weg om de binomiaalcoëfficiënten te vinden is wel die via het zoeken van het aantal combinaties van m elementen uit een verzameling van n elementen (hier de combinaties van m factoren uit het produkt van n factoren $a + b$). De bepaling van dit aantal combinaties is voor onze leerlingen heel goed te begrijpen, althans als we de zaak met geschikte voorbeelden inleiden. Men kan b.v. beginnen met het aantal mogelijkheden om uit een klas van 20 leerlingen een afvaardiging van 2 leerlingen samen te stellen, eerst bij verkiezing in de functie van 1e en 2e afgevaardigde en dan met weglating van dit onderscheid. Hierna kan men dan op dezelfde manier de keuze van een bestuur van 3 leden, voorzitter, secretaris en penningmeester, aan de orde stellen. Het exact en beknopt geformuleerde betoog voor het algemene geval blijft echter m.i. toch wel behoren tot de moeilijkste dingen die we onze discipelen voorzetten.

3. Men kan ook de binomiaalformule bewijzen door volledige inductie, maar deze manier is weinig bevredigend omdat men hierbij eerst de formule min of meer uit de lucht moet laten vallen. Bovendien geeft het nogal wat gereken.

4. Aantrekkelijker acht ik, naast of in de plaats van de weg van de combinatieleer, de volgende afleiding, waarbij gebruik gemaakt wordt van een reeds behandeld gedeelte van de differentiaalrekening.

Het is duidelijk dat $(a + b)^n$ bij uitwerking een homogene veelterm van de n^e graad in a en b oplevert. We kunnen dus

$$(a + b)^n \equiv {}_nc_0 a^n + {}_nc_1 a^{n-1} b + \ldots + {}_nc_m a^{n-m} b^m + \ldots + {}_nc_n b^n$$

stellen. Gemakkelijk is in te zien dat

$${}_nc_0 = {}_nc_n = 1.$$

De overige c's worden als volgt bepaald.

$$(1 + x)^n \equiv {}_nc_0 + {}_nc_1 x + {}_nc_2 x^2 + \ldots + {}_nc_m x^m + \ldots + {}_nc_n x^n.$$

Differentiëren we nu beide leden naar x, dan krijgen we:

$$n(1 + x)^{n-1} \equiv {}_nc_1 + 2{}_nc_2 x + \ldots + m{}_nc_m x^{m-1} + \ldots + n{}_nc_n x^{n-1}.$$

Anderzijds geldt echter

$$(1 + x)^{n-1} \equiv {}_{n-1}c_0 + {}_{n-1}c_1 x + \ldots + {}_{n-1}c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \\ + {}_{n-1}c_{n-1} x^{n-1},$$

dus

$$n(1 + x)^{n-1} \equiv n_{n-1}c_0 + n_{n-1}c_1 x + \ldots + n_{n-1}c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \\ + n_{n-1}c_{n-1} x^{n-1},$$

zodat (voor $1 \leqq m \leqq n$) geldt:

$$m \cdot {}_nc_m = n \cdot {}_{n-1}c_{m-1},$$

dus

$$\boxed{{}_nc_m = \frac{n}{m} \cdot {}_{n-1}c_{m-1}.}$$

Evenzo is nu

$${}_{n-1}c_{m-1} = \frac{n-1}{m-1} \cdot {}_{n-2}c_{m-2},$$

$${}_{n-2}c_{m-2} = \frac{n-2}{m-2} \cdot {}_{n-3}c_{m-3},$$

— — — — — — —

— — — — — — —

— — — — — — —,

$${}_{n-m+1}c_1 = \frac{n-m+1}{1} \cdot {}_{n-m}c_0$$

en bijgevolg

$$_nc_m = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{n-2}{m-2} \cdots \frac{n-m+1}{1} \cdot {}_{n-m}c_0, \text{ dus}$$

$$_nc_m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot m},$$

of anders geschreven:

$$_nc_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

5. Het verband tussen $_nc_m$ en $_{n-1}c_{m-1}$ kan, evenals dat wat daaruit volgt, geschikt geïllustreerd worden met behulp van de driehoek van Pascal.

1 1
1 2 1
1 *3* 3 1
1 4 *6* 4 1
1 5 10 *10* 5 1
1 6 15 20 *15* 6 1

Men verifieert dan b.v. gemakkelijk:

$$_6c_4 = \frac{6}{4}\,{}_5c_3 = \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{3}\,{}_4c_2$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2}\,{}_3c_1$$

$$= \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1}\,{}_2c_0$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6!}{4!\,2!}.$$

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

XLIII. *Over worpparabolen.*

Wanneer in een verticaal vlak OXY uit de oorsprong een stoffelijk punt wordt geworpen met beginsnelheid v en onder een elevatiehoek α, terwijl de versnelling van de zwaartekracht g is, dan gelden voor de coördinaten van de op het tijdstip t bereikte plaats

$$x = v \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

Als men α elimineert krijgt men de betrekking

$$x^2 + y^2 + gt^2y - v^2t^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 = 0 \tag{2}$$

waaraan wij een korte discussie wijden.

Zijn x, y en v gegeven dan levert (2) ons de tijd die nodig is om met voorgeschreven beginsnelheid het doel (x, y) te bereiken. De vergelijking is in t van de vierde graad; de wortels zijn twee aan twee elkaars tegengestelde: de baan kan ook in tegengestelde zin doorlopen worden. De oplossingen voor t^2 zijn dan en alleen dan reëel als de discriminant van (2) niet-negatief is, dus als

$$(gy - v^2)^2 - g^2(x^2 + y^2) \geqq 0$$

of

$$y \leqq -\frac{g}{2v^2}x^2 + \frac{v^2}{2g} \tag{3}$$

waarmee het onder de gestelde omstandigheden bereikbare gebied, begrensd door de *veiligheidsparabool* p, is bepaald.

Het produkt der wortels is altijd positief, de som is zeker positief als (3) geldt, dus in dat geval zijn er twee positieve wortels voor t^2. Als bij gegeven (x, y) de beginsnelheid v onbegrensd toeneemt dan naderen de wortels tot 0 en ∞: van de twee mogelijke banen is de ene zeer vlak, de andere steil en hoog.

Wij beschouwen nu in (2) de grootheden v en t als vast en x en y variabel en lezen dan dadelijk af: *als men uit* O *met dezelfde beginsnelheid maar in verschillende richtingen werpt dan is de meetkundige*

plaats van de op een gegeven tijdstip t bereikte punten een cirkel. Het middelpunt M van deze isochroon heeft de coördinaten $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}gt^2$ en de straal R is gelijk aan vt. Uit (2) en (3) blijkt dat de cirkel en de veiligheidsparabool p elkaar tweemaal raken en wel in de punten

$$x^2 = \frac{v^2}{g^2}(g^2t^2 - v^2), \qquad y = -\frac{1}{2g}(g^2t^2 - 2v^2)$$

Bij variabele t heeft men dus: M valt als of het in O zonder beginsnelheid was losgelaten, R neemt evenredig met t toe; voor $t < \frac{v}{g}$ ligt de cirkel binnen p, voor $t = \frac{v}{g}$ osculeert zij p in de top, voor $t > \frac{v}{g}$ hebben de cirkel en p twee reële raakpunten, die voor $\frac{v}{g} < t < \frac{v\sqrt{2}}{g}$ boven de X-as liggen. p is niet alleen de omhullende der baankrommen, maar ook van de isochronen.

Wij beschouwen thans in (2) x, y en t vast, zodat de oplossing wordt gegeven van de vraag: met welke snelheid v moet men werpen opdat na het tijdsverloop t het doel (x, y) wordt bereikt. Omdat (2) lineair is in v^2 heeft men altijd één oplossing

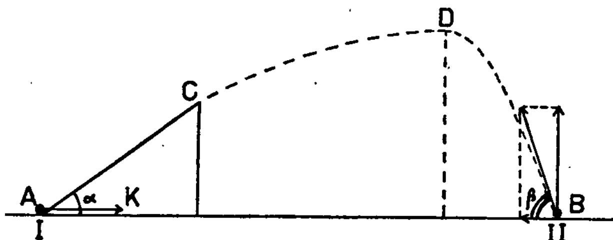
$$v^2 = \frac{x^2 + y^2 + gt^2y + \frac{1}{4}g^2t^4}{t^2}$$

die een gebroken functie is van $t^2 = u$. Men heeft $\frac{dv^2}{du} = 0$ als $g^2u^2 = 4(x^2 + y^2)$. M.a.w. wil men het doel (x, y) met minimale beginsnelheid bereiken (en dus met minimale energie) dan moet $t^2 = \frac{2}{g}\sqrt{x^2 + y^2}$ worden gekozen, en dus $v^2 = g\,(\sqrt{x^2 + y^2} + y)$. Dat komt overeen met het geval dat (2) twee gelijke wortels heeft of weer wat anders gezegd: men moet v zo kiezen dat (x, y) komt te liggen op de door v bepaalde veiligheidsparabool. Merkwaardig is misschien nog: *de meetkundige plaats van de punten waarvoor de voordeligste weg een zelfde tijd t vergt is een cirkel om* O *met straal* $\frac{1}{2}gt^2$.

MECHANICA-OPGAVEN N I 1959

Alleen de tot de leerstof voor de h.b.s.-B behorende opgaven zijn afgedrukt. Van eventueel in de vraagstukken voorkomende koorden wordt aangenomen dat ze niet-elastisch, volkomen buigzaam en massaloos zijn. Van eventueel voorkomende katrollen worden massa en wrijving verwaarloosd. Luchtweerstand wordt verwaarloosd. $g = 10$ m/sec^2.

I-2. Op een stoffelijk punt I met een gewicht van 2 kg, dat aan de voet van een wrijvingsloze helling AC ligt, gaat een horizontale kracht $K = 2\frac{8}{9}$ kg werken, constant in richting en grootte, tot C bereikt is. Dan vervalt K. $tg\,\alpha = 0{,}75$; $AC = 9$ m.



Enige tijd, nadat I uit A vertrokken is, schiet men een stoffelijk punt II dat 1 kg weegt, in B weg met een beginsnelheid waarvan de horizontale component 4 m/sec bedraagt.

I en II botsen volkomen veerkrachtig in het hoogste punt van hun banen.

a. Hoeveel sec na het vertrek van I uit A is II weggeschoten en onder welke hoek met de horizon?

b. Hoe groot is AB?

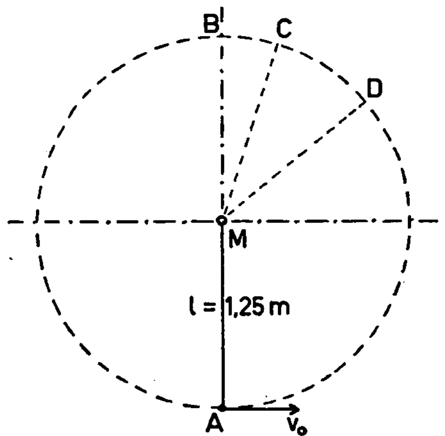
c. Waar en met welke snelheid (in grootte en richting) treft I het vlak AB?

I-3. Een stoffelijk punt dat 100 g weegt, is bevestigd aan een massaloze staaf van 1,25 m, die zonder wrijving om M draaibaar is in een verticaal vlak.

C ligt in verticale zin 5 cm lager dan B en D 45 cm lager dan B.

Men geeft het stoffelijk punt een horizontale beginsnelheid v_0 uit zijn stabiele evenwichtsstand A, zodanig dat C het hoogste punt is, dat het stoffelijk punt bereikt.

1. Hoe groot is v_0?
2. Bereken en teken de kracht die de staaf in C op het stoffelijk punt uitoefent; bepaal de versnelling van het stoffelijk punt in C in grootte en richting.



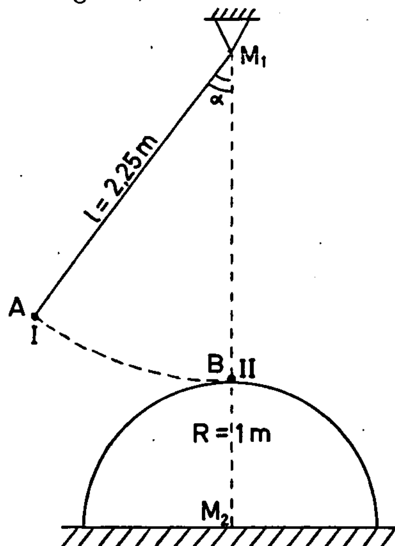
3. Bepaal de kracht die het stoffelijk punt in D op de staaf uitoefent; bepaal ook de versnelling van het stoffelijk punt in D in grootte en richting.

II-2. Een stoffelijk punt I met een gewicht van 0,5 kg, bevestigd aan een massaloze draad, wordt in de getekende stand MA (cos α = 0,8) losgelaten. In B botst I volkomen veerkrachtig tegen een stoffelijk punt II met een gewicht van 1 kg, dat in labiel evenwicht op een massieve halve bol ligt.

Alle wrijving wordt verwaarloosd.

Zal II na de botsing de bol direct verlaten, of zal II over de bol gaan glijden?

Bepaal in het eerste geval, wáár II het horizontale vlak door M_2 treft, of in het andere geval, wáár II de halve bol verlaat.



DENKBEELDIG GETAL BIJ CARDANO

door

Dr. C. J. Vooys

's-Gravenhage

De benamingen reële en imaginaire wortels zullen wel afkomstig zijn uit het taalgebruik van Descartes. Voorzover bekend, komen deze woorden het eerst voor in de oorspronkelijke, Franse uitgave van zijn Géometrie, verschenen in 1637 [1]). Maar het gebruik van de wortels uit een negatief getal vinden wij het eerst bij Cardano. Deze veelzijdige onderzoeker heeft in zijn Ars magna van 1545 bovendien het niet-reële van deze grootheden aangegeven door gebruik te maken van het Latijnse: imaginari *zich inbeelden* [2]). We laten hier volgen de volledige gedachtengang van Cardano met de op enkele plaatsen verbeterde Latijnse tekst.[3]) De korte samenvatting, die we vinden bij Hankel [4]) en Cantor zou tot een misvatting kunnen leiden.

„regel 2. de 2e manier van „de verkeerde veronderstelling" maakt gebruik van de wortel uit een negatief getal.

Bewijs

om deze regel goed te begrijpen diene het volgende: lijn *ab*, die wij 10 zullen noemen, moet verdeeld worden in twee delen, waarvan de rechthoek 40 moet bedragen. Nu is 40 het viervoud van 10. Omdat wij het viervoud van geheel *ab* willen bereiken, moet eerst *ad* gevormd worden, het kwadraat van *ac*, de helft van *ab*; en van *ad* moet men aftrekken het viervoud van *ab*; de wortel van het overschot, als er iets overbleef, zou, bij *ac* gevoegd en van *ac* afgetrokken, de twee gevraagde delen aangeven; maar omdat het overschot hier negatief is, daarom moet men „zich inbeelden" $\sqrt{-15}$, n.l. de wortel van het verschil van *ad* en het viervoud van *ab*; deze wortelvorm moet men toevoegen aan en aftrekken van *ac* en men heeft de gevraagde oplossing, en wel zo:

---

[1]) Oeuvres VI 453 Adam et Tannery.

[2]) Cantor Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik II 508 1913.

[3]) Naar de uitgave van 1570 Bazel blz. 132 Ars magna; de uitgave van 1663 Lugdunum IV blz. 287 geeft ongeveer dezelfde tekst.

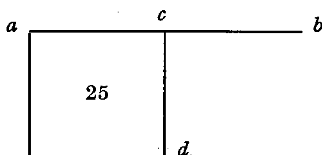
[4]) Hankel: Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter 1874.

$5 + \sqrt{25 - 40}$ en $5 - \sqrt{25 - 40}$
of $5 + \sqrt{-15}$ en $5 - \sqrt{-15}$; vermenigvuldig $5 + \sqrt{-15}$ met $5 - \sqrt{-15}$, dat wordt met weglating van de kruisprodukten: $25 - - 15$, dat is $+ 15$; dus is dit produkt 40. Toch is het karakter van *ad* en *ab* niet hetzelfde als van 40, want dit is een oppervlak, dat geheel verschilt van het karakter van getal en lijn, maar, omdat men hiermee in andere gevallen geen bewerkingen kan uitvoeren, zoals met een gewoon negatief getal en men ook niet kan te weten komen, wat het eigenlijk is, heeft het de meeste overeenkomst met de volgende grootte, die het resultaat is van een verkeerde redenering. Hier is die verkeerde redenering: men voegt het kwadraat van de helft van het getal toe aan het getal dat moet ontstaan en van de vierkantswortel van de som trekt men af de helft van het getal dat gedeeld moet worden, en ook voegt men die helft aan die wortel toe. Bijvoorbeeld: in dit geval moet men 10 verdelen in 2 delen, die het produkt 40 opleveren. Voeg 25, het kwadraat van de helft van 10, bij 40; dat wordt 65. De wortel hiervan moet men verminderen en vermeerderen met 5; dan heeft men volgens overeenkomstige redenering de delen $\sqrt{65} + 5$ en

---

regula II. secundum genus positionis falsae est per radicem m̄.

demonstratio



ut igitur regulae verus pateat intellectus, sit ab linea, quae dicatur 10, dividenda in duas partes, quarum rectangulum debeat esse 40. est autem 40. quadruplum ad 10. quare nos volumus quadruplum totius ab, igitur fiat ad, quadratum ac, dimidii ab, et ex ad auferatur quadruplum ab, absque numero, R. igitur residui, si aliquid maneret, addita et detracta ex ac, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis R. m̄. 15, id est differentiae ad, et quadrupli ab, quam adde et minue ex *ac*, et habebis quaesitum, scilicet

5. p̄. R. V 25 m̄. 40 et 5. m̄. R. V. 25. m̄. 40. seu 5. p̄. R. m̄. 15. et 5. m̄. R. m̄. 15. duc 5. p̄. R. m̄. 15. in 5. m̄. R. m̄. 15. dimissis incruciationibus, fit 25. m̄.m̄. 15, quod est p̄. 15. igitur hoc productum est 40. natura tamen ad, non est eadem cum natura 40, nec ab, quia superficies est remota a natura numeri, et lineae;

5. p̄ R. m̄. 15.
5. m̄ R. m̄ 15.
25. m. m. 15. quod est 40

$\sqrt{65} - 5$. Maar deze getallen verschillen onderling 10; opgeteld leveren ze niet 10, maar $\sqrt{260}$. Zover gaat de rekenkundige spitsvondigheid; het uiterste hiervan is zo spitsvondig, — ik heb het al gezegd — dat het geen nut heeft.

Vraagstuk 4.

Maak van 6 twee delen, waarvan de kwadraten samen 50 bedragen; dit wordt opgelost met behulp van regel 1, want het gaat om een echt negatief: vermenigvuldig 3, de helft van 6, met zichzelf, dat wordt 9; trek dit af van de helft van 50, dat is 25, de rest wordt 16; neem daarvan de vierkantswortel; voeg die bij en trek die af van 3, de helft van 6; dan worden de delen 7 en — 1; de kwadraten zijn samen 50; de som is 6.

Vraagstuk 5.

Op dezelfde manier vindt men de oplossing van het volgende vraagstuk: verdeel 6 in twee gedeelten, waarvan het produkt bedraagt — 40.

Vermenigvuldig 3, de helft van 6, met zichzelf, dat wordt 9; voeg dit bij 40, dat wordt 49; de vierkantswortel hiervan, 7, moet men optellen bij 3, de helft van 6, en er ook van aftrekken; dan heeft men + 10 en — 4, welke met elkaar vermenigvuldigd — 40 opleveren, en bij elkaar opgeteld 6 bedragen. Eveneens wordt het produkt van — 10 en + 4 : — 40; samen zijn deze — 6; daarom gaat het ook in dit geval over een echte negatieve grootte en is regel 1 hier van toepassing. Hieruit blijkt: als men zegt verdeel 6 in twee

---

proximius tamen huic quantitati, quae vere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m̄. nec in aliis operationes exercere licet, nec venari, quid sit. Modus est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo et a R aggregati minuas ac addas dimidium dividendi. Exemplum, in hoc casu divide 10 in duas partes, producentes 40. adde 25 quadratum dimidii 10 ad 40. fit 65. ab huius R minue 5. et adde etiam 5. habebis partes secundum similitudinem, R. 65. p̄. 5. et R. 65. m̄. 5. At hi numeri differunt in 10; non iuncti faciunt 10, sed R. 260. et hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.

quaestio IIII

Fac de 6[1]) duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, haec solvitur per primam non per secundam regulam est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se, fit 9, minue ex dimidio 50 quod est 25, fit residuum 16, cuius R 4, adde et minue à 3, dimidio 6, fiunt partes 7 et 1 m: harum quadrata iuncta sunt 50, et aggregatum est 6.

---

[1]) De latijnse tekst van 1570 en 1663 heeft bij vergissing: 8.

delen, die met elkaar vermenigvuldigd 40 leveren, dan is er sprake van een bedriegelijk negatief; hier geldt regel 2. Zegt men: verdeel 6 in twee delen, die het produkt — 40; of ook verdeel — 6 zo, dat de twee delen — 40 tot produkt hebben, dan is er in beide gevallen sprake van een gewoon negatief en geldt hier regel 1. Die gedeelten zullen zijn zoals hiervoor is gezegd; maar als men zegt: laat — 6 zo verdeeld worden dat het produkt + 40 wordt, dan is er sprake van een bedriegelijk negatief, dan geldt hier regel 2. De delen zullen worden: $-3+\sqrt{-31}$ en $-3-\sqrt{-31}$.

Regel 3.

We kunnen echter nog een ander soort negatief op sporen, dat noch een zuiver negatief is noch de wortel uit een negatief maar iets dat geheel onjuist is; deze regel ontstaat als 't ware uit deze beide en ik zal hiervan één voorbeeld geven, het volgende:

Vraagstuk 6.

Drie getallen te vinden in middelevenredige verhouding zó dat de wortel van het eerste getal, afgetrokken van het eerste getal, het tweede getal vormt en dat de wortel van het tweede getal, afgetrokken van het tweede getal, het derde getal vormt.

Stel dan het eerste getal: 1 kwadraat; dan wordt het tweede getal: 1 kwadraat min 1 onbekende; en het derde: 1 kwadraat min 1 onbekende min de wortel van 1 kwadraat min 1 onbekende; vermenigvuldig het eerste getal met het derde; en het tweede met zichzelf; dan heeft men dezelfde hoeveelheden, zoals men ziet door

---

quaestio V.

Per idem solvitur quaestio haec; fac ex 6 duas partes, quarum una in reliquam ducta, producatur m̄. 40, duc. 3 dimidium 6. in se, fit 9. adde ad 40. fit 49. huius R. quae est 7. adde ad 3 dimidium 6. et minue, habebis 10. p̄ et 4. m̄. quae ducta invicem producunt 40. m̄ et iuncta faciunt 6. ita 10. m̄ et 4. p̄ producunt 40. m̄ et iuncta faciunt 6. m̄. ideo etiam haec quaestio, est de puro m̄ et pertinet ad primam regulam Ex hoc patet, quod si quis dicat fac de 6 duas partes, ex quarum multiplicatione invicem, producatur 40. quaestio est de m̄. sophistico, et pertinet ad secundam regulam. Et si dicat fac de 6. duas partes, ex quarum multiplicatione invicem producatur 40. m̄ vel ex 6. m fiant duae partes producentes m̄. 40, utroque modo erit quaestio de m̄. puro ,et pertinebit ad primam regulam; et tales partes erunt quae dictae sunt, et si dicat quod ex 6. m̄ fiant duae partes, quarum productum sit 40. p. quaestio erit de m̄. sophistico, et pertinebit ad secundam regulam et erunt partes m̄ 3. p̄ R. m̄ 15. et m̄ 3. m̄. R. m. 15 [1])

[1]) De latijnse tekst van 1570 (Bazel) blz. 132 en van 1663 (Lugdunum) blz. 288 heeft de getallen 15 in plaats van de getallen 31.

$$\tfrac{1}{4};\ -\tfrac{1}{4};\ -\tfrac{1}{4}-\sqrt{-\tfrac{1}{4}}$$

deze bewerking uit te voeren; het produkt van het eerste en het derde getal is $-\frac{1}{16}+\sqrt{\frac{1}{64}}$ of $\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ en dezelfde uitkomst ontstaat door het tweede getal met zichzelf te vermenigvuldigen."

Regula III

Possumus vero venari genus m. aliud, quod neque est purum m. neque R. m. sed res omnino falsa et componitur haec regula quasi ex ambobus et dabo huius unum exemplum, quod est hoc

quaestio VI

Invenias tres numeros in continua proportione, quorum R. primi detracta à primo, facit secundum, et R. secundi, detracta a secundo, faciet tertium.

Ponemus igitur primum: 1. quadratum et secundum erit 1. quad. m. 1. positione, et tertius erit 1. quad. m. 1. positione m. R. 1. quadrati m. 1. positione, duc primum in tertium, et secundum in se, habebis quantitates ipsas,

$$\tfrac{1}{4}\ \Big|\ \text{m.}\ \tfrac{1}{4}\ \Big|\ \text{m.}\ \tfrac{1}{4}\ \text{m. R. m.}\ \tfrac{1}{4}$$

operando ut vides, et productum primi in tertium, est m. $\frac{1}{16}$ p. R. $\frac{1}{64}$, quod est $\frac{1}{8}$ m. $\frac{1}{16}$, et tantum fit ducto secundo numero in se.

BOEKBESPREKING

Dr. H. Streefkerk, *Nieuw Meetkundeboek voor M.O. en V.H.O.* P. Noordhoff N.V. Groningen, 1959. Dl II 123 bladz. *f* 3,50, 3de druk; Dl III 95 bladz. *f* 3,75 2de druk.

De schrijver zegt in het voorbericht van deze keurig verzorgde overzichtelijke boekjes, dat hij zich ten gevolge van de invoering van het nieuwe programma genoodzaakt heeft gezien de 2de helft van dl. II en tevens dl. III behoorlijk om te werken door opname van een zo elementair mogelijk gehouden driehoeksmeting: wel heeft hij getracht de volgorde van de onderwerpen zo veel mogelijk te behouden. Bij het doornemen van beide deeltjes krijg ik de indruk, dat de schrijver in dit alles best is geslaagd.

Het zij mij echter vergund met het oog op volgende drukken enige opmerkingen te maken.

Aan § 8 van dl. II (Stelling van Pythagoras) zou ik eventueel in de vorm van een vraagstuk vastknopen, dat men alle grondtripels van de Diophantische vergelijking $c^2 - b^2 = a^2$ kan verkrijgen door $c = p^2 + q^2$ en $b = p^2 - q^2$ te stellen, zodat dan $a = 2pq$ wordt, waarbij p en q geheel, maar onderling ondeelbaar, echter niet *beide* oneven genomen dienen te worden: kleitafels hebben geleerd, dat de Babyloniërs hier zeer goed mee vertrouwd waren, evenals waarschijnlijk de schrijver zelf, blijkens de getallen geplaatst bij fig. 11.

De behandeling van de leer der evenredigheden door vooral het begrip evenredigheidsfactor naar voren te brengen, doet mij sympathiek aan; inzonderheid het eerste bewijs van stelling 63.

Ook met de behandeling van de gelijkvormigheid ga ik gaarne akkoord; wel zouden deze de stellingen over de gelijkvormigheid van driehoeken, als directe toepassing

van de definitie gegeven in § 48, m.i. wel vlugger behandeld kunnen worden: men heeft zich slechts af te vragen, waarmee telkens △ABC vermenigvuldigd dient te worden, opdat de produktfiguur △A'B'C' *congruent* met △DEF wordt.

Okken

1. Prof. Paul B. Fisher; *Arithmetik*; 152 S; D.M. 2.40; 3. Auflage; 1958; Sammlung Göschen; Band 47.

2. Prof. Dr. Wolfgang Haack; *Darstellende Geometrie* I; 113 S; D.M. 2.40; 2. Auflage; 1958; Sammlung Göschen, Band 142.

3. Prof. Dr. Siegfried Valentiner; *Vektoren und Matrizen*; 202 S; D.M. 4.80; 8. Auflage; 1958; Sammlung Göschen 354/354a.

Het is een genoegen de aandacht van de lezers van Euclides te mogen vestigen op de gerenommeerde Sammlung Göschen, welke serie reeds zo vele jaren van betrouwbare zijde en op hoog niveau staande wiskundige informatie heeft gebracht.

„Arithmetik" is een herdruk van een eenvoudig, helder geschreven werkje, dat uitgaande van de rij der natuurlijke getallen het getalbegrip uitbreidt tot dat der complexe getallen. De betoogtrant is zó, dat onze oudere leerlingen het boekje kunnen lezen. Naast de voor onze scholen traditionele leerstof wordt echter ook aandacht geschonken aan methoden voor vierkantsworteltrekking en kubiekworteltrekking en aan kettingbreuken. De irrationale getallen worden ingevoerd als niet-repeterende, oneindige, decimale breuken, waarna uitvoerig wordt ingegaan op Dedekind's „Stetigkeit und irrationale Zahlen". Het boekje is vrijwel een herdruk van de eerste druk van 1938. De literatuurverwijzing op de laatste bladzijde bevat slechts één titel van na 1934.

De „Darstellende Geometrie" is het eerste deeltje uit een serie van drie; het tweede zal de lichamen met gebogen oppervlak behandelen, het derde axonometrie en perspectief.

Na een historische inleiding, teruggaande tot 4000 v. Chr. wordt een overzicht gegeven van de diverse projectiemethoden; hierna komen de grondconstructies der Monge-projectie aan de orde, terwijl het laatste hoofdstuk de affiniteit in het algemeen en de ellips als affiene afbeelding van de cirkel in het bijzonder behandelt.

Het belangrijkste deeltje van de drie hier genoemde is Valentiner's „Vektoranalyse" dat onze bijzondere aandacht verdient in een periode waarin wij leraren hebben te overwegen wat er uit de vektorrekening voor onze scholen geschikt gemaakt dient te worden en hoe dit zal moeten gebeuren.

Van harte aanbevolen.

Wansink.

Prof. dr. Paul Lorenz, *Anschauungsunterricht in Mathematischer Statistik* S. Hirzel Verlag Leipzig 1959. xi+213 blz. 27 afb. DM. 18,60.

Het boekje is bedoeld voor hen, die zich in de praktijk bedienen van mathematisch-statistische methoden. Men dient dus niet een mathematisch verantwoorde afleiding van de verschillende formules te verwachten.

De formules worden getoetst aan enige voorbeelden en daarna in praktijk gebracht op biologisch, medisch, physiologisch gebied zowel als op de leer van de erfelijkheid.

Aan het slot zijn een 60-tal bladzijden met tabellen toegevoegd. Voor belangstellenden aanbevolen.

B.

Scientiarum Historia. Driemaandelijks tijdschrift voor de geschiedenis van de geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen. Jaargang 1, 1959 deel 2 en 3. Jaarabonnement 40 Bfrs. Redactie en beheer: Prinsstraat 5, Antwerpen.

In deze twee deeltjes vindt men aardige bijzonderheden over het oudste gedrukte Nederlandse rekenboekje, over enkele medische onderwerpen zoals: De medische behandeling, controle en adviezen in de tuchthuizen van Arnhem en Antwerpen in de 17e en 18e eeuw.

In de boekenrevue viel me een bespreking op van: *Het dagboek van Albrecht von Haller*. Een uitgave van de Kon. Ned. Gist- en Spiritusfabrieken N.V. te Delft. (1959). Haller studeerde in de jaren 1725—1729 in ons land. Tal van geleerden uit die tijd worden hierin „raak" getypeerd.

Burgers

Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen, *Raaklijn en Oppervlakte*. Een inleiding tot de infinitesimaalrekening op aanschouwelijke grondslag. Haarlem. De erven F. Bohn, N.V. 1959, 380 bladz. *f* 20,—.

De schrijver heeft dit boek in de eerste plaats bestemd voor hen, die de wiskunde als hulpwetenschap gebruiken: hij denkt hierbij aan technici, experimentele fysici en chemici maar ook aan economisten, voorts aan medici en biologen, terwijl het tevens kan dienen als oriëntering voor studenten in de wis- en natuurkunde.

De beide eerste hoofdstukken vat de schrijver op als een herhaling van „dingen, die men uit en te na op school heeft geleerd" maar de lezer stelle zich gerust: de behandelingswijze wijkt voldoende van de traditioneel gevolgde af. Op de tweede bladz. maken we kennis met de getallen rechte, waarop de reële getallen worden afgebeeld. Van het complexe vlak (en complexe getallen) wordt nergens gerept, ook niet om de vermenigvuldiging $(-a)\ (-b) = +ab$ meetkundig toe te lichten.

Bij de constructie van het punt C (fig. 1. 1—4) als toelichting van $a \times b = c$ zou de schrijver m.i. op kunnen merken, dat $\triangle$ OCB′ zodoende gelijkvormig met $\triangle$ OAE′ wordt, zodat ook evenredigheid OC : OB′(OB) = OA (OA') : OE' geldt, dus de *gestippelde* constructie van C onmiddellijk blijkt.

De schrijver vergast ons verder o.a. op de constructies van de grafieken van functies $|x|$, $[x]$, $x - [x]$, $(-1)[x]$ alsmede op de wijze, waarop men van functies gemakkelijk het produkt en het quotiënt (dus ook de reciproque en de inverse van een functie) kan worden verkregen; ook samengestelde functies worden niet vergeten.

Bij het voorbeeld 4 op pag. 45 zou ik *ook* verwijzen naar hoofdstuk 5 en het voorbeeld op pag. 52 zou ik als volgt redigeren:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x^2 + \frac{a_1}{a_2}\ x) + a_0 = a_2(x + \frac{a_1}{2a_2})^2 + \frac{D}{a_2} \text{waarbij } D = a_0a_2 - \tfrac{1}{4}a_1^2$$

de discriminant van de *drie*term wordt genoemd. Op pag. 54 staat een storende drukfout; er moet staan $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$; verdient het geen voorkeur (2, 3 — 2) op pag. 55 te schrijven als $f(x) = q(x)(x - c) + f(c)$?

De goniometrische functies worden als cirkelfuncties gelukkig niet op de traditionele wijze behandeld (zie pag. 67—pag. 88).

De behandeling van de oppervlakte van een „hyperbool trapezium" dient, zoals we van onze schrijver konden verwachten als uitgangspunt voor de definitie van ${}^{e}\log x$, e^x, ${}^{g}\log x$ en van de hyperbolische functies, welke behandeling ten zeerste aanbevolen kan worden evenals de wijze, waarop de machten met willekeurige reële

exponenten $a^r (a > 0$ en r reëel) worden ingeluid door de formule $r \log a = \log a^r$ *algemeen* te laten gelden.

Op pag. 106 zie ik 2 drukfouten: in *regel* 15 v.o. $r \log x$ en *in regel* 10 v.o. $\log x^{-r}$. Pag. 129 *regel* 9 v.o. „Dit resultaat is zeer opmerkelijk" vervangen door: „Dit resultaat was te verwachten."

De hoofdstukken 3 en 4 bevatten de techniek van de differentiaal- en van de integraalrekening (op pag. 134 regel 10 v.o. dient te staan $f'(x) = x^x(1 + \log x)$ toegelicht door een voldoende serie instructievoorbeelden; het 4de hoofdstuk besluit met een vlotte behandeling van de lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde met een stel uitgewerkte voorbeelden.

Het vijfde hoofdstuk verdiept, aldus de schrijver, bepaalde theoretische inzichten en verschaft ons daardoor de mogelijkheid reeds enkele wiskundige hoogten te bestijgen.

De schrijver staat vrij lang stil bij het verloop $\log x$ (in een herdruk zou dit m.i. nog op een geschikte plaats kunnen worden geïllustreerd door ook het getal van Euler of Mascheroni er in te betrekken). De reeksontwikkeling voor $\log x$ wordt vastgeknoopt aan de meetkundige reeks evenals die voor de boogtangens van x. De uitbreiding van de middelwaarde stelling brengt ons dan heuristisch in kennis met de stelling van Taylor dus ook met reeksontwikkeling van e^x, $\sin x$, $\cos x$ evenzeer met de binomiaal reeks. Het hoofdstuk besluit met de raking van krommen en dus ook met de bepaling van de kromtestraal en het kromtemiddelpunt.

In het zesde hoofdstuk wordt „het begrip bepaalde integraal besproken op een wijze, die van de traditionele enigszins afwijkt" maar er volgens mijn overtuiging best ingaat. In fig. 6.1—2 is de letter Q weggevallen. In het voorbeeld 6 op bladz. 259 is een *verschrijving* geslopen; regel 10 v.o.: de schrijver zal bedoeld hebben „We berekenen eerst de *oppervlakte van het halve hyperbool segment* AP_xP; daarvoor vinden we $\int_1^x \sqrt{(u^2 - 1)}du$ dus na de aangegeven substitutie

$$\int_0^\theta \sinh^2 v dv = \frac{1}{2}\int_0^\theta (\cosh 2v - 1)dv = \frac{1}{4}\sinh 2v - \frac{1}{2}v \Big|_0^\theta = \frac{1}{4}\sinh 2\theta - \frac{1}{2}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sinh\theta\cosh\theta - \frac{1}{2}\theta$$

zodat het oppervlak van het hyp. segment $AP^*P = \sinh\theta\cosh\theta - \theta = xy - \theta$ zal zijn, maar xy stelt voor het opp. van $\triangle\ OP^*P$, dus θ het oppervlak van de kromlijnige sector OP^*P, zoals de schrijver ook op pag. 260 cursief vermeldt. Ons vermoeden, dat we in dit hoofdstuk ook een keurige afleiding van de formule van Stirling zullen aantreffen, wordt volkomen bevestigd. De afleiding van de integraal van Gaussz wijkt weer van de kortere traditionele af (in 6, 7—11 op pag. 286 ontdekt men een foutief ongelijkteken) maar verdient zeer onze aandacht.

De Fouriercoëfficienten worden vastgeknoopt aan de bespreking van $A\cos x + B\sin x$ en ruimschoots door voorbeelden toegelicht. Het hoofdstuk besluit met een degelijke verhandeling over de integraal van Dirichlet.

Het laatste hoofdstuk houdt zich bezig met de transformatie van La Place „tot voor kort slechts het eigendom van specialisten", zodat de opname er van „gewaagd" kan schijnen. De schrijver doet zijn best te demonstreren, dat dit geenszins het geval is.

Het is een mooi boek, zeer onderhoudend geschreven, dat zijn weg wel zal vinden m.i. ook in leraarskringen.

Okken

DE ONDERWIJSBEVOEGDHEID VAN INGENIEURS EN OFFICIEREN [1]

Onderwijsbevoegdheid van de ingenieurs

1. Oude regeling

De onderwijsbevoegdheid van de ingenieurs berustte tot 4 sept. 1956 op art. 129 van de hoger onderwijswet en was nader geregeld bij beschikking van de minister van O.K. en W. van 16 juli 1928.

Bij deze beschikking werd aan alle ingenieurs, die na 31 januari 1924 aan de technische hogeschool te Delft hun diploma behaalden, bevoegdheid toegekend om aan hogereburgerscholen met driejarige cursus onderwijs te geven in de wiskunde.

Voorts verleende deze beschikking aan hen, die na bovengenoemde datum aan de technische hogeschool te Delft een ingenieursdiploma behaalden, onderwijsbevoegdheid voor 5-jarige hogere burgerscholen:

a. voor de wiskunde en de mechanica: aan de civiel-ingenieurs, de werktuigkundig ingenieurs, de scheepsbouwkundig ingenieurs, de elektrotechnisch ingenieurs, de natuurkundig ingenieurs, de vliegtuigbouwkundig ingenieurs en de geodetisch ingenieurs;
b. voor het lijntekenen: aan de civiel-ingenieurs, de bouwkundig ingenieurs, de werktuigkundig ingenieurs, de scheepsbouwkundig ingenieurs, de elektrotechnisch ingenieurs en de vliegtuigbouwkundig ingenieurs;
c. voor de natuurkunde: aan de elektrotechnisch ingenieurs, de scheikundig ingenieurs en de natuurkundig ingenieurs;
d. voor de scheikunde: aan de scheikundig ingenieurs;
e. voor het handtekenen: aan de bouwkundig ingenieurs.

Een bewijs van pedagogische en didactische voorbereiding hadden de ingenieurs niet nodig, wel uiteraard een verklaring van zedelijk gedrag.

De besproken regeling heeft met ingang van 4 september 1956 haar gelding verloren tengevolge van de wijziging van de hogeronderwijswet bij de wet van 7 juni 1956 Stb. 320 en de vaststelling van een nieuw Technische-Hogeschool-statuut. Voor hen die na genoemde datum een ingenieursdiploma hebben behaald of behalen, geldt voor wat betreft de daaraan verbonden onderwijsbevoegdheid een nieuwe regeling. Onderwijsbevoegdheden, verkregen voor 4 september 1956 op grond van de boven uiteengezette regeling, blijven echter behouden.

2. Regeling voor het tijdvak 4 september 1956—4 september 1961

Zoals boven reeds werd vermeld, is de hoger-onderwijswet gewijzigd bij de wet van 7 juni 1956 Stb. 320. Daarbij zijn de bepalingen inzake het technisch hoger

[1]) Overgenomen uit de „Mededelingen van de Bond van Verenigingen voor Christelijk Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs", nos. 260 (mrt. 1959) en 261 (april 1959). Voor de verleende toestemming daarvoor, zeggen wij hier gaarne dank. Red.

onderwijs grondig herzien. De bepaling van art. 129 inzake de onderwijsbevoegdheid van ingenieurs is vervallen. In de plaats daarvan werd in artikel 119 der wet het voorschrift opgenomen, dat in het Technische-Hogeschoolstatuut de aan het ingenieursdiploma verbonden onderwijsbevoegdheden zouden worden geregeld. Bij K.B. van 2 december 1958, Stb. 594 is het Technisch-Hogeschool-statuut opnieuw vastgesteld. De art. 38—43 van dit K.B. regelen de onderwijsbevoegdheden verbonden aan de ingenieursdiploma's.

Art. 43 van het K.B. betreffende de vakken, waarvoor de diverse ingenieursdiploma's onderwijsbevoegdheid verlenen, heeft terugwerkende kracht tot 4 september 1956, terwijl de artikelen 39—42 inzake het bewijs van pedagogisch-didactische scholing eerst op 5 september 1961 in werking treden. Art. 38 ten slotte, regelende de aantekening van de onderwijsbevoegdheid op de ingenieursdiploma's, trad op 21 december 1958 in werking.

Voor degenen, die in het tijdvak 4 september 1956—4 september 1961 een ingenieursdiploma hebben behaald of alsnog behalen, zijn de onderwijsbevoegdheden als volgt geregeld:

1. het diploma van civielingenieur geeft de bevoegdheid onderwijs te geven aan scholen voor v.h.m.o. in wiskunde, mechanica en rechtlijnig tekenen;
2. het diploma van geodetisch ingenieur geeft de bevoegdheid tot het geven van onderwijs aan v.h.m.o.scholen in de wiskunde;
3. het diploma van bouwkundig ingenieur geeft de bevoegdheid tot het geven van onderwijs aan genoemde scholen in rechtlijnig tekenen;
4. het diploma van werktuigkundig ingenieur geeft de bevoegdheid tot het geven van onderwijs aan v.h.m.o.scholen in wiskunde, mechanica en rechtlijnig tekenen;
5. het diploma van elektrotechnisch ingenieur geeft de bevoegdheid onderwijs te geven aan v.h.m.o.scholen in wiskunde, mechanica en natuurkunde;
6. het diploma van scheikundig ingenieur geeft die bevoegdheid in natuur- en scheikunde;
7. het diploma van natuurkundig ingenieur geeft die bevoegdheid in wiskunde, mechanica en natuurkunde;
8. het diploma van scheepsbouwkundig ingenieur geeft die bevoegdheid in wiskunde, mechanica en rechtlijnig tekenen;
9. het diploma van vliegtuigbouwkundig ingenieur geeft die bevoegdheid in wiskunde, mechanica en rechtlijnig tekenen;
10. het diploma van metaalkundig ingenieur geeft die bevoegdheid in wiskunde, mechanica, natuurkunde en scheikunde.

De onderwijsbevoegdheid wordt zonder meer verkregen op grond van het met gunstig gevolg afleggen van een ingenieursexamen. Een bewijs van pedagogisch-didactische scholing is niet vereist. Art. 38 van het Technisch-hogeschoolstatuut bepaalt, dat op de keerzijde van het ingenieursdiploma, door de afdeling, tussenafdeling, interfaculteit of onderwijsafdeling, welke het diploma verleent, aangetekend wordt voor welke vakken onderwijsbevoegdheid is verkregen. Dit voorschrift is 21 december 1958 in werking getreden. Wij nemen aan, dat op de diploma's van hen, die voor 21 december 1958 het ingenieursexamen met goed gevolg hebben afgelegd, desgevraagd alsnog een dergelijke aantekening zal worden geplaatst.

3. Regeling vanaf 5 september 1961

De regeling van de vakken, voor welke ingenieursdiploma's onderwijsbevoegd-

heid geven, zal ook na 4 september 1961 dezelfde zijn als die welke onder punt 2 werd besproken.

Evenwel wordt na 4 september 1961 de onderwijsbevoegdheid voor zover het betreft de wiskunde, de mechanica, de natuurkunde en de scheikunde slechts verkregen, indien de examinandus, blijkens een door de senaat van een der technische hogescholen of de faculteit der wis- en natuurkunde van een der Nederlandse universiteiten afgegeven verklaring voldoende bewijs heeft geleverd van genoegzame pedagogisch-didactische scholing in het algemeen en ten aanzien van het vak of de vakken, waarvoor onderwijsbevoegdheid wordt verlangd, in het bijzonder. Dit bewijs kan worden geleverd voor of na het afleggen van het ingenieursexamen.

In het eerste geval wordt op het ingenieursdiploma aanstonds aangetekend, voor welke vakken het onderwijsbevoegdheid verleent. In het tweede geval vindt die aantekening plaats, zodra het bedoelde bewijs is geleverd. Het bewijs van genoegzame pedagogisch-didactische scholing wordt geacht te zijn geleverd, wanneer de examinandus:

a. gedurende tenminste één jaar regelmatig de door de betreffende docenten aangewezen colleges in pedagogiek, puberteitspsychologie en algemene didactiek heeft gevolgd;
b. zich op de hoogte heeft gesteld van de didactiek van de te onderwijzen vakken;
c. gedurende een door de desbetreffende senaat of faculteit te bepalen termijn, omvattende tenminste drie- en ten hoogste zes maanden, gehospiteerd heeft aan een school voor v.h.m.o., m.n.o. of kweekschool.

Wordt niet voldaan aan de onder *a.* genoemde eis, dan moet de examinandus zich onderwerpen aan een tentamen. Van de onder *a.* genoemde eis is vrijgesteld hij, die zich naar het oordeel van de desbetreffende senaat of faculteit in voldoende mate heeft bezig gehouden met de studie van pedagogiek, puberteitspsychologie en algemene didactiek.

Van de onder *c.* vermelde eis kan de senaat of faculteit vrijstelling verlenen, indien de kandidaat op andere wijze praktische ervaring heeft verkregen. Opgemerkt zij nog, dat het bewijs van voldoende pedagogisch-didactische scholing niet geldt voor het verkrijgen van onderwijsbevoegdheid in het rechtlijnig tekenen.

4. Landbouwkundig ingenieurs

Deze zijn bevoegd tot het geven van onderwijs aan v.h.m.o. scholen in scheikunde, indien zij hun diploma hebben behaald vóór 1 september 1954. Degenen, die na die datum in Wageningen het ingenieursdiploma hebben behaald, bezitten niet voor enig vak onderwijsbevoegdheid voor het v.h.m.o.

Onderwijsbevoegdheid van officieren

1. Inleiding

Voorheen was in art. 89 van de M.O.-wet bepaald, dat degenen, die aan een der rijksinstellingen tot opleiding van officieren der land- en zeemacht de cursus hadden ten einde gebracht, bevoegd waren tot het geven van middelbaar onderwijs in de technische wetenschappen, waarin zij gedurende die cursus onderwijs hadden ontvangen. Het tweede lid van art. 16 der Hogeronderwijswet werd zodanig geïnterpreteerd, dat de officieren, die voor een bepaald vak onderwijsbevoegdheid bezaten voor de hogere burgerscholen, geacht werden ook bevoegd te zijn tot het geven van dat vak aan gymnasia.

Bij de wet van 20 mei 1955 Stb. 224, welke voor wat het onderhavige punt

betreft geacht wordt in werking te zijn getreden op 1 september 1954, is artikel 89 van de middelbaar-onderwijswet geschrapt.

De officieren, welke na 31 augustus 1954 hun opleiding voltooien of hebben voltooid, zijn derhalve niet meer bevoegd tot het geven van onderwijs aan scholen voor v.h.m.o.

De officieren welke op 31 augustus 1954 voor een of meer vakken onderwijsbevoegdheid bezaten hebben echter die onderwijsbevoegdheid behouden. Er is dus thans nog een categorie van officieren welke bevoegd zijn onderwijs te geven aan scholen voor v.h.m.o. en die mitsdien tot leraar kunnen worden benoemd. Aangezien in de praktijk blijkt, dat af en toe door een schoolbestuur wordt overwogen een officier als leraar aan te stellen, komt het ons gewenst voor op de regeling vervat in art. 89 (oud) van de M.O.-wet, enigszins nader in te gaan.

2. Rijksinstellingen tot opleiding van officieren

Eerste voorwaarde voor de onderwijsbevoegdheid van officieren is, volgens art. 89 (oud) der m.o.-wet, dat de belanghebbenden de cursus hebben ten einde gebracht aan een der rijksinstellingen tot opleiding van officieren. Deze rijksinstellingen zijn de K.M.A. te Breda, en het Koninklijk Instituut voor de marine te Den Helder (Willemsoord).

De officieren, welke niet aan een van deze beide instellingen zijn opgeleid (b.v. officieren die hun opleiding hebben genoten aan een der scholen voor de opleiding van reserveofficieren) zijn niet bevoegd tot het geven van onderwijs in enig vak aan een school voor v.h.m.o.

3. Technische wetenschappen

De officieren, die aan een der bovengenoemde instellingen waren opgeleid, verkregen bevoegdheid tot het geven van onderwijs in de technische wetenschappen, waarin zij gedurende hun opleiding onderwijs hadden ontvangen. Onder „technische wetenschappen" moeten in dit verband worden verstaan: wiskunde, mechanica, natuurkunde, scheikunde en tekenen.

4. Onderwijsbevoegdheid van de officieren der onderscheiden wapens

Steeds is aangenomen, dat de officieren van administratie voor geen enkel vak onderwijsbevoegdheid verkregen. De overige officieren bezaten, naar de gangbare mening, allen onderwijsbevoegdheid voor wiskunde.

De officieren van bepaalde wapens (officieren der artillerie, der genie etc.) waren dan bovendien nog bevoegd tot het geven van onderwijs in een of meer andere vakken (mechanica, natuurkunde).

Vaste regels zijn te dezer zake echter nimmer gesteld. Ingevolge art. 89 (oud) der m.o.-wet verkreeg een officier onderwijsbevoegdheid voor *elk* van de technische wetenschappen, waarin hij gedurende zijn opleiding onderwijs had genoten.

Verkeert een schoolbestuur derhalve in twijfel over de vraag voor welke vakken een officier onderwijsbevoegdheid bezit, dan ware eerst na te gaan in welke technische vakken hij gedurende zijn officiersopleiding onderwijs heeft genoten.

Blijft dan nog onzekerheid bestaan, dan wende men zich tot de minister van O.K. en W.

DE KONIJNTJESREEKS VAN FIBONACCI EN DE GULDEN SNEDE

door

J. C. G. NOTTROT

's-Gravenhage

Het in historisch kostuum ten tonele voeren van het konijnenvraagstuk van Fibonacci door Dr. C. J. Vooys in „Euclides" van 15 december j.l.[1]) is voor mij aanleiding over de hieruit voortgekomen reeks 1, 1, 2, 3, 5, 8, enz. nog iets in het midden te brengen wat misschien niet algemeen bekend is.

Elke volgende term van deze recurrente reeks wordt verkregen door de laatste twee voorgaande op te tellen. Laat ik elke aldus te vormen reeks *optelreeks* noemen. In het algemene geval uitgaande van twee begintermen a en b, wordt de optelreeks: a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, enz. De reeks coëfficiënten van a en evenzo die van b is dus de konijntjesreeks (met links nog 1 of 2 termen toegevoegd).

Uit de algemene optelreeks vormen wij de reeks: $\frac{b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{a+2b}{a+b}$, $\frac{2a+3b}{a+2b}$, enz., d.i. dus de reeks van de verhouding van twee opeenvolgende termen.

Stel $\frac{b}{a} = c$, dan is deze reeks ook te schrijven als:

$$c,\quad 1+\frac{1}{c},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c}},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c}}},\quad \text{enz.}$$

De verhouding van twee opeenvolgende termen van een optelreeks nadert dus tot de waarde van de oneindig voortlopende kettingbreuk waarin alle wijzergetallen gelijk aan één zijn, d.w.z. tot het „gulden snede"-getal $g = 1,\ 61803399\ \ldots$ *of* $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

De merkwaardigste optelreeks is daarom de reeks:

1, g, $1 + g$, $1 + 2g$, $2 + 3g$, enz., want deze is identiek met de machtreeks:

1, g, g^2, g^3, g^4, enz.

[1]) Euclides 34, blz. 108.

Een andere merkwaardige optelreeks is 1, 3, 4, 7, 11, enz. Dit zijn namelijk de opeenvolgende waarden van $g^n + (-g)^{-n}$ voor $n =$ 1, 2, 3, enz.

De konijntjesreeks 1, 1, 2, 3, 5, 8, enz. heeft de opeenvolgende waarden van $\frac{g^n - (-g)^{-n}}{\sqrt{5}}$ voor $n = 1, 2, 3$, enz.

RECREATIE

19. Bij een enquete wordt nagegaan, welke auto's meer ongelukken veroorzaken, militaire of burgerauto's. Er worden onderzocht 140 burgerauto's en 90 militaire auto's. Beide categorieën worden gesplitst in personenauto's en vrachtwagens. De uitslag is:

burgerauto's	90	personenauto's	16	ongelukken,
	50	vrachtwagens	6	ongelukken,
militaire auto's	50	personenauto's	9	ongelukken,
	40	vrachtwagens	5	ongelukken.

Hieruit blijkt, als we aannemen, dat geen auto twee ongelukken maakt, dat de kans, dat een burgerpersonenauto een ongeluk maakt geringer is dan de kans, dat een militaire personenauto een ongeluk maakt. Hetzelfde geldt voor de vrachtwagens. Bezien we echter alleen het totaal, dan zien we, dat de kans, dat een militaire auto een ongeluk maakt geringer is dan de kans, dat een burgerauto een ongeluk maakt. Gevraagd de oplossing van deze paradox.

20. Een hond loopt van Amsterdam naar Parijs. Hij vertrekt met een snelheid van 1 m/sec uit Amsterdam. Straatjongens binden hem bij het vertrek een blik aan zijn staart. Elke keer als de hond het blik op straat hoort vallen, schrikt hij en verdubbelt hij daardoor zijn snelheid. Wordt gevraagd met welke snelheid de hond in Parijs aankomt.

16a. Van verschillende zijden bereikte ons de mededeling, dat het in nr. 16 voldoende is, als men over slechts één echte munt beschikt.
Gaarne leggen we deze rectificatie alsnog aan de lezers voor.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

16. Leg op de linker schaal 45 munten en op de rechter 36 plus 9 echte. Is er evenwicht, dan bevindt de valse zich onder de resterende 41 en gaan we verder als onder 15bD.

Is er geen evenwicht, dan hebben we reeds de beschikking over $9 + 41 = 50$ munten, waarvan de echtheid vaststaat. We leggen dan van de 45 munten, die op de linker schaal lagen, er 18 op de linker plus 18 echte. Op de rechter schaal leggen we de resterende 27 munten, die links lagen plus 9, die rechts lagen. Is er evenwicht, dan bevindt de valse munt zich onder de 27, die van de linker schaal weggenomen zijn en is bekend, of hij te licht of te zwaar is. We gaan dan verder als onder 15a.

Is er geen evenwicht en slaat de schaal nu naar de andere kant door, dan bevindt de valse munt zich onder de 27, die van de linker schaal naar de rechter overgebracht zijn en is bekend, of hij te licht of te zwaar is. We gaan dan verder als onder 15a.

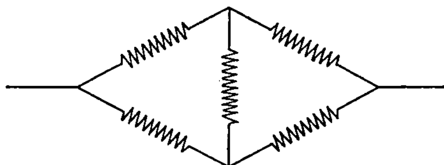
Is er geen evenwicht en slaat de schaal naar dezelfde kant door, dan bevindt de

valse munt zich onder de 18, die links of onder de 9, die rechts gebleven zijn, en is niet bekend, of hij te licht of te zwaar is.

Van deze 18 munten leggen we er nu 9 op de linker en 9 op de rechter schaal. Hoe het resultaat van deze weging uitvalt, altijd kunnen we eruit opmaken, of de valse munt in het linker negental, in het rechter negental of in het overgebleven negental (dat bij de vorige weging op de rechter schaal lag) zich bevindt en of hij te zwaar of te licht is. Ook nu gaan we verder als onder 15a.

In alle gevallen zijn dus 5 wegingen voldoende.

17. Men moet de weerstanden anders ordenen (zie fig.), zodat men er de brug van Wheatstone in herkent. Men ziet dan, dat de brug stroomloos wordt. De substitutieweerstand is dus die van twee parallel geschakelde weerstanden van elk 4Ω, dus 2Ω.



KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Singel 13, Hoogezand.

VOORDRACHTEN MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht", in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 17 februari 1960: Prof. Dr. H. J. A. Duparc: Rationale en irrationale lijnstukken in de Euclidische meetkunde. Aanvang 20,00 uur.

In de serie „Actualiteiten" in „Krasnapolsky", Warmoesstraat 173—199, Amsterdam op zaterdag 27 februari 1960: Dr. C. G. Lekkerkerker (Onderwerp nog niet bekend). Aanvang 14,00 uur.

Prof. Dr. F. van der Blij (4 à 5 voordrachten op dinsdagavond om de veertien dagen) over: „Enkele voordrachten over getallentheorie, geïnspireerd door het werk van E. Hecke".

1e Voordracht op 9 februari 1960 in het MC (zie boven), aanvang 19,45. Belangstellenden worden verzocht zich zo spoedig mogelijk op te geven bij de administratie van het MC.